Roskilde
University

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II

Heefelt, Mogens Brun

Publication date:
1993

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Heefelt, M. B. (1993). *Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 263 http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/

TEKST NR 263 1993

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II

Revideret udgave

af: Mogens Brun Heefelt

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse II (revideret udgave)

af: Mogens Brun Heefelt

IMFUFA tekst nr. 263/93 33 sider ISSN 0106-6242

Abstract. Denne tekst er supplerende materiale til kurset "Lineære strukturer fra algebra og analyse" og indeholder sætninger og eksempler om invariante underrum, nulrum for lineære differentialoperatorer, diagonalisering af matricer og jordans normalform samt supplerende opgaver og de sidste seks eksamenssæt i kurset.

Teksten læses som supplement til **Griffel:** Linear Algebra and its Applications, Vol. I + II. Denne tekst erstatter IMFUFA-tekst 258 med samme titel.

Afsnit A: Invariante underrum

I dette afsnit vil vi vise nogle sætninger om invariante underrum, som vil blive anvendt i de to følgende afsnit.

Lad os betragte et vektorrum V over $\mathbb{C}$, og lad A: V -> V være en lineær operator på V. Er videre W et underrum af V, da kaldes W **et invariant underrum over for** A, hvis

$$Aw \in W \text{ for alle } w \in W$$

dvs, at

$$A(W) \subseteq W.$$

Eksempel A1. Er v_1 en egenvektor for operatoren A svarende til egenværdien λ_1 vil $W = Sp\{v_1\}$ være et invariant underrum over for A, da det for alle $w \in W$ gælder, at $Aw = \lambda_1 w$. #

Eksempel A2. Betragtes egenrummet E_λ for A svarende til egenværdien λ, vil også dette underrum i V være invariant over for A, da det for alle $v \in E_\lambda$ gælder, at $Av = \lambda v$. #

Er p et polynomium af n-te grad med reelle koefficienter, fx

$$p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$$

kan man for den lineære operator A definere, at

$$p(A) = a_0 + a_1 A + ... + a_n A^n.$$

Ved simpel udregning ses da, at

$$Ap(A) = p(A)A.$$

Er q tilsvarende et polynomium af k-te grad med reelle koefficienter, defineres på samme måde

$$q(A) = b_0 + b_1 A + ... + b_k A^k.$$

Man får igen ved simple udregninger, at

$$q(A)p(A) = p(A)q(A)$$

da $A^i A^j = A^j A^i$.

Eksempel A3. Er p et polynomium af grad n, og er W = N(p(A)) - nulrummet for p(A) - skal vi se, at W er invariant over for A.

Er $w \in W$, dvs at $p(A)w = 0$, kan vi slutte, at

$$p(A)(Aw) = p(A)Aw = Ap(A)w = 0$$

hvilket viser, at $Aw \in W$. #

Sætning A1. Vi betragter nu en operator T: V -> V, der antages nilpotent af grad k dvs, at der findes et $v \in V$ således at

$$T^{k-1}v \neq 0 \quad \text{og} \quad T^k v = 0.$$

Det skal da vises, at mængden

$$S = \{T^{k-1}v, T^{k-2}v, \ldots, Tv, v\}$$

vil være lineær uafhængig, samt at $W = Sp(S)$ vil være invariant over for T.

Betragtes nu linearkombinationen

$$c_1T^{k-1}v + c_2T^{k-2}v + \ldots. + c_{k-1}Tv + c_kv = 0$$

skal man vise, at man kun finder den trivielle linearkombination. Lader vi T^{k-1} virke på linearkombinationen, fås

$$c_kT^{k-1}v = 0.$$

Da $T^{k-1}v \neq 0$ bliver $c_k = 0$. Lader vi dernæst T^{k-2} virke på linearkombinationen, får man

$$c_{k-1}T^{k-1}v = 0,$$

heraf følger tilsvarende at $c_{k-1} = 0$. Sådant fortsættes med T^j for $j = k-2, \ldots, 0$ og man ser, at $c_{k-2} = \ldots. = c_2 = c_1 = 0$.

Da $T(T^jv) = T^{j+1}v$ bliver $T(S) \subset S$, og da tillige S er en basis for W, er W invariant over for T. #

Eksempel A4: Er A: V -> V givet, og er λ en egenværdi for A, således at operatoren

$$T = A - \lambda I$$

er nilpotent af grad k, da vil - som vist i sætningen - S være lineær uafhængig. Af

$$\begin{aligned} A(T^jv) &= A(A - \lambda I)^jv \\ &= A(A - \lambda I)^jv - \lambda(A - \lambda I)^jv + \lambda(A - \lambda I)^jv \\ &= (A - \lambda I)^{j+1}v + \lambda(A - \lambda I)^jv \\ &= T^{j+1}v + \lambda T^jv \end{aligned}$$

ses, at $A(T^jv)$ altså kan skrives som linearkombination af elementer i S (der jo er en basis for W). Således er $A(W) \subseteq W$. #

Sætning A2. Lad nu p være et polynomium af grad n, og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t)p_2(t)$, hvor p_1 og p_2 begge er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Lad V være nulrummet for operatorem $p(A) - N(p(A))$, da skal vi vise, at

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

dvs V er en direkte sum af $W_1 = N(p_1(A))$ og $W_2 = N(p_2(A))$.

Da p_1 og p_2 har største fælles divisor 1, findes polynomier q_1 og q_2, således at

$$q_1(t)p_1(t) + q_2(t)p_2(t) = 1,$$

og derfor er

$$(*) \qquad q_1(A)p_1(A) + q_2(A)p_2(A) = I.$$

Med $v \in V$, er jfr (*)

$$v = q_1(A)p_1(A)v + q_2(A)p_2(A)v.$$

Her vil det første led på højre side i ligningen tilhører W_2, da

$$p_2(A)[q_1(A)p_1(A)v] = q_1(A)p_1(A)p_2(A)v = q_1(A)p(A)v = 0,$$

da $v \in N(p(A))$. Tilsvarende vises, at det andet led tilhører W_1, og således er V sum af W_1 og W_2. Vi mangler at vise, at summen er direkte, dvs at udtrykket

$$v = w_2 + w_1$$

med $w_i \in W_i$, $i = 1,2$, er entydigt fastlagt af v. Lader vi nu $q_1(A)p_1(A)$ virke på summen er

$$q_1(A)p_1(A)v = q_1(A)p_1(A)w_2$$

da $p_1(A)w_1 = 0$. Anvendes dernæst (*) på w_2 bliver

$$w_2 = q_1(A)p_1(A)w_2 = q_1(A)p_1(A)v,$$

da $p_2(A)w_2 = 0$. Tilsvarende bliver

$$w_1 = q_2(A)p_2(A)v,$$

og dermed er w_1 og w_2 entydigt fastlagt ud fra v. #

Denne sætning kan umiddelbart genereliseres til:

Sætning A3. Lad p være et polynomium af grad n, og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_k(t)$, hvor $p_1, \ldots, p_k$ alle er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Da er

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots \oplus N(p_k(A)).$$

Dette vises ved induktion. For $k = 2$ er det vist i sætning A2. Lad os nu antage, at sætningen er korrekt for $k = j$, dvs at

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots. \oplus N(p_j(A)),$$

når $p(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_j(t)$, og polynomierne har største fælles divisor 1. Vi betragter nu

$$p(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_j(t) \cdot p_{j+1}(t)$$

hvor polynomierne har største fælles divisor 1. Da nu produktet af de første j af polynomierne, dvs

$$q(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_j(t)$$

opfylder sætningen, vil

$$N(q(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots. \oplus N(p_j(A)).$$

Samtidig er $$p(t) = q(t) \cdot p_{j+1}(t),$$

hvor q og p_{j+1} har største fælles divisor 1; ifølge sætning A2 bliver da

$$N(p(A)) = N(q(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Med $N(q(A))$ indsat bliver derfor

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots. \oplus N(p_j(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Hermed er sætningen bevist. #

En simpel konsekvens af denne sætning bliver nu:

Sætning A4. Lad polynomiet p have følgende faktoropløsning

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1}(t - a_2)^{m_2}\ldots.(t - a_k)^{m_k},$$

hvor alle a_i-er er forskellige. Da vil $N(p(A))$ være direkte sum af underrummene U_1, $U_2,\ldots,U_k$, hvor

$$U_i = N((A - a_iI)^{m_i}).$$

Afsnit B: Nulrum for lineære differentialoperatorer

I denne tekst skal vi arbejde på at bestemme en basis for nulrummet til en lineær differentialoperator af n-te orden, fx

$$L = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + b_1D + b_0D^0$$

hvor alle b_i er reelle konstanter. I hele dette afsnit vil differentialoperatoren D virke på vektorrummet C^∞, rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner.

Er polynomiet

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots. + b_1t + b_0,$$

kan vi direkte benytte sætning A3 på differentialoperatoren D og finde en basis for nulrummet N(p(D)).

Man skal iøvrigt være opmærksom på, at spørgsmålet om at finde en basis for dette nulrum, betyder det samme som at finde samtlige løsninger til den n-te ordens lineære differentialligning

$$(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + b_1D + b_0D^0)f(t) = 0.$$

Da vi fortsat arbejder i et vektorrum V over $\mathbb{C}$, har polynomiet p en faktoropløsning i førstegradspolynomier som forudsat i sætning A3, dvs

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1}(t - a_2)^{m_2}\ldots.(t - a_k)^{m_k},$$

og ifølge sætningen kan en basis for N(p(D)) findes, når man har fundet en basis for hvert af nulrummene $U_i = N((D - a_iD^0)^{m_i})$.

Til dette formål får vi brug for følgende sætning:

Sætning B1. $\qquad (D - aD^0)^m f(t) = e^{at}D^m(e^{-at}f(t))$

Dette vises ved induktion efter m. For m = 1 får man

$$e^{at}D(e^{-at}f(t)) = e^{at}[-ae^{-at}f(t) + e^{-at}f'(t)]$$

$$= f'(t) - af(t) = (D - aD^0)f(t).$$

Antages sætningen nu korrekt for m = k, skal man vise, at den også gælder for m = k + 1. Det gælder altså at

$$(D - aD^0)^k f(t) = e^{at}D^k(e^{-at}f(t)),$$

som vi skal bruge på formen

$$e^{-at}(D - aD^0)^k f(t) = D^k(e^{-at}f(t)).$$

Da er

$$e^{at}D^{k+1}(e^{-at}f(t)) = e^{at}D[D^k(e^{-at}f(t))] =$$

$$e^{at}D[e^{-at}(D - aD^0)^k f(t)] =$$

$$e^{at}[-ae^{-at}(D - aD^0)^k f(t) + e^{-at}D(D - aD^0)^k f(t)] =$$

$$(D - aD^0)(D - aD^0)^k f(t) = (D - aD^0)^{k+1}f(t). \quad \#$$

Vi kan nu af denne sætning se, at en bestemmelse af nulrummet for operatoren $(D - aD^0)^m$, bliver at finde de funktioner f, som opfylder

$$(D - aD^0)^m f(t) = 0 \quad \text{eller} \quad D^m(e^{-at}f(t)) = 0.$$

Funktioner, der opfylder $D^m g(t) = 0$, er alle polynomier af grad højst m - 1, dvs

$$e^{-at}f(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1}$$

hvor alle c_i kan vælges frit. Derfor er

$$f(t) = (c_0 + c_1 t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1})e^{at}$$

eller

$$N((D - aD^0)^m) = Sp\{e^{at}, te^{at}, \ldots, t^{m-1}e^{at}\}.$$

Eksempel B1. Er $L = D^2 + 4D + 3D^0$ er det tilhørende andengradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$, og derfor bliver nulrummet $N(L) = Sp\{e^{-t}, e^{-3t}\}$.

Eksempel B2. Er $L = D^2 + 4D + 4D^0$ er det tilhørende andengradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2$, og derfor bliver nulrummet $N(L) = Sp\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$.

Eksempel B3: Er $L = D^4 - 2D^2 + D^0$ er det tilhørende fjerdegradspolynomium $p(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t + 1)^2(t - 1)^2$, og derfor bliver nulrummet $N(L) = Sp\{e^{-t}, te^{-t}, e^t, te^t\}$.

Indtil nu har der kun været behandlet den situation, hvor faktoropløsningen er reel, men vi ved, at fx andengradspolynomiet

$$p(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2 + i)(t + 2 - i).$$

Vi ved imidlertid også, at de komplekse rødder i et andengradspolynomium med reelle koefficienter vil være komplekst konjugerede, dvs er $\alpha + i\beta$ rod vil også $\alpha - i\beta$ være rod, og man har at

$$p(t) = (t - (\alpha + i\beta))(t - (\alpha - i\beta)) = t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2$$

Derfor vil nulrummet for $p(D) = D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$ have basis

$$\{e^{(\alpha+i\beta)t},\ e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

Disse funktioner er imidlertid ikke reelle, og tilhører derfor ikke C^∞. Vi skal dog undersøge, om det med en passende valgt (kompleks) linearkombination af disse funktioner er muligt at finde en reel funktion. Hertil kan vi benytte, at

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

og man kan således omskrive et element i nulrummet på følgende måde

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1+c_2)\cos\beta t + i(c_1-c_2)\sin\beta t] \\ &= k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

og netop når

$$c_1 = (k_1 - ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 + ik_2)/2$$

med $k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$, vil f blive en reel funktion.

Vi kan således se, at også $\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t\}$ vil være en basis for N(p(D)), og den har tilmed den fordel, at dens elementer er reelle funktioner.

Eksempel B4. Er $L = D^2 + 4D + 5D^0$ er det tilhørende andengrads-polynomium $p(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2 + i)(t + 2 - i)$ som vist ovenfor, og man har da $N(L) = Sp\{e^{-2t}\cos t,\ e^{-2t}\sin t\}$.

Hvis $\alpha + i\beta$ er rod i polynomiet med multiplicitet k, vil tilsvarende $\alpha - i\beta$ være rod i polynomiet med multiplicitet k, og man kan på en tilsvarende måde som ovenfor vise, at de to komplekse basiselementer $t^i e^{(\alpha+i\beta)t}$ og $t^i e^{(\alpha-i\beta)t}$ kan erstattes med de to reelle basiselementer

$$t^i e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{og} \quad t^i e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Således kan vi nu opsamle vores resultater om fastlæggelse af en basis for nulrummet til den lineære differentialoperator L = p(D) hvor

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots. + b_1 t + b_0.$$

a) Er a en enkelt reel rod i p(t) vil

$$e^{at} \in N(L)$$

b) Er a en reel rod med multiplicitet k i p(t) vil

$$e^{pt},\ te^{pt},\ \dots,\ t^{k-1}e^{pt} \in N(L)$$

c) Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ enkle, komplekst konjugerede rødder i p(t), vil

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t \in N(L)$$

d) Er endelig $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ komplekst konjugerede rødder med multiplicitet k i p(t), vil

$$\begin{array}{l} e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ \dots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ \dots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \in N(L) \end{array}$$

Egenrum for lineære differentialoperatorer.

I Griffel, kapitel 5G er vist, at hvis μ er egenværdi for en lineær afbildning g: V -> V, vil samtlige egenvektorer for g svarende til egenværdien μ - sammen med 0-elementet - være et underrum. Dette underrum kaldes egenrummet for μ - E_μ. Det er endvidere vist, at dette egenrum er nulrummet for afbildningen $g - \mu i$, dvs $E_\mu = N(g-\mu i)$.

Er således L: C^∞ -> C^∞ en lineær differentialoperator kan man efterspørge egenfunktionerne for L svarende til en egenværdi μ, dvs finde samtlige funktioner $f \in C^\infty$, som opfylder

$$Lf = \mu f,$$

hvilket jfr den nævnte sætning svarer til at finde en basis for nulrummet $N(L - \mu D^0)$.

Afsnit C: Diagonalisering af matricer og JORDAN's normalform

Som det fremgår af Griffel, kapitel 8A kan en n×n matrix A diagonaliseres hvis og kun hvis der findes en basis for $\mathbb{C}^n$ af egenvektorer for matricen A.

Med udgangspunkt i denne sætning antager vi nu, at A har egenværdierne $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (hvor flere egenværdier kan være ens) med de tilhørende egenvektorer $v_1,\ldots,v_n$ (som er lineært uafhængige). Der gælder da, at

$$\forall i : Av_i = \lambda_i v_i.$$

Indføres nu matricen $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, vil S i søjlerne netop have alle de lineært uafhængige egenvektorer. Da er

$$\begin{aligned} AS &= (Av_1, Av_2, \ldots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= SD \end{aligned}$$

hvor D er en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen, netop opskrevet i den samme rækkefølge, som egenvektorerne er opskrevet i transformationsmatricen S. Da søjlerne i S er lineært uafhængige svarer AS = SD til at

$$D = S^{-1}AS.$$

Spørgsmålet er nu, hvad der sker, når man <u>ikke</u> har en basis for $\mathbb{C}^n$ af egenvektorer for A.

For det første kan man nøjes med at undersøge de egenværdier, hvor

$$\mathrm{gm}(\lambda) < \mathrm{algm}(\lambda).$$

Til de øvrige egenværdier er der egenvektorer "nok". Mangler der egenvektorer suppleres listen af egenvektorer (der er dog altid mindst én) med det antal lineært uafhængige vektorer, der svarer til differensen

$$\mathrm{algm}(\lambda) - \mathrm{gm}(\lambda).$$

Det kan vises, at man altid på en nøje foreskreven måde kan finde en sådan lineært uafhængig mængde knyttet til egenværdien λ.

Tilfældet $gm(\lambda) = 1$.

Vi betragter først det tilfælde, hvor den aktuelle egenværdi har $gm(\lambda) = 1$ og $algm(\lambda) = k$. Således er den eneste egenvektor bestemt af

$$Av_1 = \lambda v_1 \qquad \text{eller} \qquad (A - \lambda E)v_1 = 0$$

De resterende vektorer skal da bestemmes af følgende algoritme

$$\begin{array}{lll} Av_2 = \lambda v_2 + v_1 & \text{eller} & (A - \lambda E)v_2 = v_1 \\ Av_3 = \lambda v_3 + v_2 & \text{eller} & (A - \lambda E)v_3 = v_2 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ Av_k = \lambda v_k + v_{k-1} & \text{eller} & (A - \lambda E)v_k = v_{k-1} \end{array}$$

Påstanden, som vi benytter uden bevis, er da, at man altid kan finde disse vektorer $v_2, v_3, \ldots, v_k$, og vi skal senere vise, at disse sammen med v_1 vil udgøre en lineært uafhængig mængde.

Sættes som før $\quad S = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$

bliver

$$\begin{aligned} AS &= (Av_1, Av_2, \ldots, Av_k) \\ &= (\lambda v_1, \lambda v_2 + v_1, \ldots, \lambda v_k + v_{k-1}) \\ &= S \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= SJ \end{aligned}$$

Denne matrix J kaldes en **jordanmatrix**, og den består af egenværdierne for A i diagonalen og af et 1-tal lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i S står en "konstrueret" (eller "syntetisk" fremstillet) vektor. De k lineært uafhængige vektorer, der udgør søjlerne i S, kaldes tilsvarende en **jordanbasis**.

Eksempel C1. Med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bliver det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3$, dvs $\lambda = 1$ er den eneste egenværdi. Af $(A - \lambda E)v_1 = 0$ kan man nu bestemme egenvektorerne svarende til egenværdien 1, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og man får, at $-z = 0$ og $x + y = 0$. Således bliver den eneste egenvektorretning fastlagt til fx

$$v_1 = (-1,1,0)^T.$$

Benyttes nu algoritmen skal vi altså finde v_2, således at

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvilket giver $-z = -1$ og $x + y = 1$ dvs

$$v_2 = (1,0,1)^T$$

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt $(0,1,1)^T$ eller $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$

Algoritmen skal fortsættes, således at man finder v_3 af

$$(A - \lambda E)v_3 = v_2,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der giver $-z = 1$ og $x + y = 0$, dvs vektorretningen bliver fx

$$v_3 = (0,0,-1)^T.$$

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og for at sikre at der er regnet rigtig skal $AS = SJ$, hvilket en simpel udregning bekræfter. #

Vi skal nu vise, at den konstruerede mængde $R = \{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ er lineært uafhængig.

Sættes nu $T = A - \lambda E$, bliver $Tv_k = v_{k-1}$, $T^2v_k = Tv_{k-1} = v_{k-2}$, ... , $T^{k-1}v_k = v_1$ samt $T^kv_k = Tv_1 = 0$ (da v_1 er en egenvektor). Da er T en nilpotent operator af grad k, og mængden

$$R = \{T^{k-1}v_k,T^{k-2}v_k,\ldots,Tv_k,v_k\},$$

er ifølge sætning A1 lineært uafhængig. Vi så samtidig i eksempel A4, at underrummet W = Sp(R) var invariant under A, og med R som basis for W viste vi tillige i eksempel A4, at

$$A(T^j v_k) = T^{j+1} v_k + \lambda T^j v_k$$

og den til A svarende matrix i basen R er netop jordanmatricen J.

Tilfældet gm(λ) > 1.

Vi går nu over til det tilfælde, hvor der er flere lineært uafhængige egenvektorer svarende til egenværdien λ, men færre end den algebraiske multiplicitet, fx algm(λ) = k. Er $v_1, v_2, \ldots, v_j$, det maksimale antal lineært uafhængige egenvektorer, således at gm(λ) = j < k, ved vi fra eksempel A1, at hver af disse er basis for et 1-dimensionalt underrum, der er invariant over for A.

Man bestemmer - i princippet - den eller de manglende vektorer lige som i tilfældet gm(λ) = 1, men det er nu ikke umiddelbart klart, hvilken vektorretning i egenrummet E_λ man skal benytte. Men påstanden er, at man altid kan finde en vektorretning $u \in E_\lambda$, således at algoritmen fra før vil fungere, dvs at

$$Av_{j+1} = \lambda v_{j+1} + u \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_{j+1} = u$$

$$\vdots$$

$$Av_k = \lambda v_k + v_{k-1} \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}.$$

Vælges nu som før disse vektorer som søjlerne i S, dvs

$$S = (u, v_{j+1}, \ldots, v_k)$$

Da bliver

$$\begin{aligned} AS &= (Au, Av_{j+1}, \ldots, Av_k) \\ &= (\lambda u, \lambda v_{j+1} + u, \ldots, \lambda v_k + v_{k-1}) \\ &= SJ \end{aligned}$$

hvor J igen er en jordanmatrix, men nu med k-j+1 rækker og søjler. Sammenholder vi imidlertid dette invariante underrum med det invariante underrum, der blev udspændt af de resterende j-1 egenvektorer, vil A i en basis udspændt af disse to underrum tilsammen være repræsenteret af matricen

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

hvor der står egenværdier i diagonalen og 1-taller lige over diagonalen i netop de sidste k-j søjler, svarende til at de tilhørende vektorer ikke er egenvektorer, men er "syntetisk" fremstillede vektorer.

Skal man rent praktisk finde den påståede vektorretning u (ϵE_λ), som skal benyttes ved beregningen af de resterende "syntetiske" vektorer, tager man udgangspunkt i matrixligningen

$$(A - \lambda E)v_{j+1} = u.$$

Vektoren u må således tilhøre billedrummet for matricen A - λE, hvilket imidlertid er identisk med, at vektoren kan udspændes af søjlerne i matricen A - λE. Da matricen A - λE er 'kraftigt' singulær vil billedrummet for den som regel være udspændt af en eller meget få lineært uafhængige søjler.

Som i tilfældet gm(λ) = 1 kan man også her vise, at den konstruerede mængde $R = \{u, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$ vil være lineært uafhængig.

Er T = A - λE, bliver $Tv_k = v_{k-1}, \ldots, T^{k-j}v_k = u$ og $T^{k-j+1}v_k = Tu = 0$, og derfor bliver $R = \{T^{k-j}v_k, \ldots, Tv_k, v_k\}$, som jfr eksempel A4 er lineært uafhængig.

Eksempel C2. Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = -(1 + \lambda)^3$, dvs den eneste egenværdi er -1 med algm(-1) = 3. Af $(A - \lambda E)v = 0$ får man tre ens ligninger af formen

$$x - 2y + z = 0,$$

der jo udspænder en plan i $\mathbb{R}^3$, dvs gm(-1) = 2, og en basis for egenrummet E_{-1} er fx

$$\{(2,1,0)^T; (1,0,-1)^T\}.$$

Da matricen

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

må det betyde, at vektorretningen $(1,1,1)^T \in E_{-1}$ udspænder billedrummet for matricen A - λE, og den vil derfor være det eneste mulige bud på vektoren u. Således vil matrixligningen

$$(A - \lambda E)v_3 = u$$

give tre identiske ligninger

$$x - 2y + z = 1$$

og man får fx $v_3 = (1,0,0)^T$.

Bemærk, at man også kunne have valgt $(0,0,1)^T$ eller $(0,-\frac{1}{2},0)^T$.

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at egenvektoren $(1,1,1)^T$ skal stå i matricen S som den sidste af de to lineært uafhængige egenvektorer. Den er benyttet til konstruktionen af den ekstra vektor, og den er derfor det første element i basen R for det invariante underrum. Det bekræftes let ved udregning, at AS = SJ. #

Opsummering

Vi betragter nu nxn-matricen A, som man om muligt vil diagonalisere. Man finder da først samtlige egenværdier $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ over $\mathbb{C}$, den samlede algebraiske multiplicitet af alle egenværdier er n. Derpå bestemmer man for hver egenværdi λ_i samtlige egenvektorer og om nødvendigt de "syntetiske" vektorer, således at disse vektorer tilsammen udspænder et underrum U_i, hvor $\dim U_i = \mathrm{algm}(\lambda_i)$. Som vi så vil U_i være invariant over for A, og derfor vil

$$\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \ldots\ldots \oplus U_m.$$

I denne basis kan vi fastlægge den til A svarende matrix ved at sammensætte den af blokke, der kun vedrører et underrum, således som det er vist i det foregående.

Afsnit D: Supplerende opgaver

1. C^0 er mængden af alle reelle, kontinuerte funktioner. Der er givet følgende mængder

$$F_1 = \{ f\epsilon C^0 \mid f(1) = 0 \}$$
$$F_2 = \{ f\epsilon C^0 \mid f(0) = 1 \}$$
$$F_3 = \{ f\epsilon C^0 \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der er underrum i C^0.

2. P_3 er mængden af alle reelle polynomier af højst tredie grad. Idet p' betyder den afledede af p, defineres følgende mængder

$$Q_1 = \{ q\epsilon P_3 \mid q'(t) - 2q(t) = t^3 \}$$
$$Q_2 = \{ q\epsilon P_3 \mid tq'(t) - 2q(t) = 0 \}$$
$$Q_3 = \{ q\epsilon P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 2q(t) = 0 \}$$
$$Q_4 = \{ q\epsilon P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 3q(t) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i P_3. Bestem endvidere samtlige de polynomier, som tilhører mængden Q_3 henholdsvis mængden Q_4.

3. C^p er mængden af alle reelle, p gange (kontinuerte,) differentiable funktioner. Idet f' betyder den afledede af f, defineres følgende mængder

$$G_1 = \{ f\epsilon C^1 \mid f' + af = 0 \}$$
$$G_2 = \{ f\epsilon C^1 \mid f' + f^2 = 0 \}$$
$$G_3 = \{ f\epsilon C^2 \mid f'' + af' + bf = 0 \}$$

hvor a og b er reelle tal. Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i C^1.

4. En kvadratisk matrix A kaldes skæv-symmetrisk, hvis det gælder at $A^T = -A$.
   a. Vis, at ethvert diagonalelement i en skæv-symmetrisk matrix vil være 0.
   b. Nedskriv en 3×3 skæv-symmetrisk matrix.
   c. Vis, at såfremt en matrix skal være både symmetrisk og skæv-symmetrisk, må den være 0-maticen.

d. Vis, at enhver kvadratisk matrix kan skrives som sum af en symmetrisk og en skæv-symmetrisk matrix.

5. Der er givet matricerne

$$E(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis da, at $E(i,j)\cdot E(j,k) = E(i,k)$ for alle $i,j,k = 1,2$ og at $E(i,j)\cdot E(k,l) = 0$, hvis $i,j,k,l = 1,2$ og $j \neq k$. Vis derpå, at enhver reel 2×2-matrix på entydig måde kan skrives som linearkombination af disse fire matricer. $M_{2,2}$ betegner mængden af alle reelle 2×2-matricer. Vis, at $M_{2,2}$ er et vektorrum, og fastlæg rummets dimension.

6. Fastlæg samtlige reelle 2×2-matricer B, der vil kommutere med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(dvs AB = BA). Vis, at mængden af sådanne matricer B vil være et underrum i $M_{2,2}$, og bestem underrummets dimension.

7. Vi skal nu generalisere opgave 5 til n×n-matricer. Således står $E(i,j)$ for den n×n-matrix, der har 1 på den i,j-te plads og 0 på alle øvrige pladser. Godtgør da, at

$$E(i,j)\cdot E(k,l) = \delta_{j,k}\cdot E(i,l)$$

hvor $i,j,k,l = 1,2,\cdot\cdot,n$ ($\delta_{j,k} = 1$ for $j = k$ og ellers $= 0$). Idet $M_{n,n}$ betegner mængden af alle reelle n×n-matricer, skal det vises, at $M_{n,n}$ er et vektorrum, og bestem rummets dimension.

8. $U_{n,n}$ betegner mængden af alle reelle, øvre n×n-trekantmatricer. Godtgør, at $U_{n,n}$ er et underrum i $M_{n,n}$, og bestem dimensionen af $U_{n,n}$. Tilsvarende betegner $S_{n,n}$ mængden af alle reelle, symmetriske n×n-matricer og $T_{n,n}$ mængden af alle de skæv-symmetriske. Vis, at såvel $S_{n,n}$ som $T_{n,n}$ er underrum i $M_{n,n}$ og bestem rummenes dimensioner.

9. Idet P_2 er mængden af alle reelle polynomier af højst anden grad betragtes de fire polynomier

$$p_0(t) = 2t^2 + t \quad , \qquad p_1(t) = t^2$$
$$p_2(t) = -t^2 + t + 1, \qquad p_3(t) = -t - 1$$

Vis, at disse fire er lineært afhængige, og bestem et lineært uafhængigt sæt af tre af disse polynomier.
Vis endelig, at ethvert element i P_2 kan skrives som linearkombination af disse tre polynomier.

10. Man betragter vektorrummet $\mathbb{C}^3$ over $\mathbb{C}$. Der er givet følgende sæt af vektorer

$$S_1 = \{ (1,0,0);\ (0,1,i);\ (1,i,-1) \}$$
$$S_2 = \{ (1,-1,i);\ (i,0,1);\ (0,1,i) \}$$
$$S_3 = \{ (i,i,i);\ (1,1,-1);\ (1,i,0) \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der lineært uafhængige, og bestem koordinaterne til vektoren $(1,2i,-3)$ med hensyn til S_2.

11. Vis, at hvert af følgende sæt af polynomier i P_3 (rummet af alle reelle polynomier af grad ≤ 3) vil udgøre en basis for P_3.

$$\{ 1,\ 1 + t,\ t + t^2,\ t^2 + t^3 \}$$
$$\{ 1,\ 1 + t,\ 1 + t^2,\ 1 + t^3 \}$$

og fastlæg koordinaterne til polynomiet $p(t) = t^3 - t^2$ i forhold til hver af baserne.

12. Betragt vektorrummet $\mathbb{C}^3$ over $\mathbb{R}$. Hvilken dimension har dette vektorrum (se tillige i Griffel, kapitel 3, opgave 24).

13. Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Angiv for hver værdi af det reelle tal a mængden af løsninger til ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x \phantom{{}+y} + z + aw &= 1\\
x + y + z \phantom{{}+aw} &= 1\\
y + z - w &= 1\\
x + y \phantom{{}+z} - w &= 1
\end{aligned}
$$

15. Bestem det reelle tal b således, at ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x - y + z + w &= 1\\
y + z + w &= 0\\
-x + y - 4z + 5w &= b + 4\\
2x - 2y + 5z + bw &= 1
\end{aligned}
$$

har mindst en løsning, og fastlæg for hvert sådant b samtlige løsninger til systemet.

16. Der er givet matricen

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ -3 & -2 & -1 & -1\\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}
$$

Bestem såvel række- som søjlerang for matricen B. Betegner M en matrix på trappeform, som er rækkeækvivalent med B, skal man udregne B^2 og M^2. Vil disse to matricer have samme rækkerang?

17. Angiv en basis for løsningsrummet for ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= 0 \qquad & -x - 2y + 3z &= 0\\
4x + 8y - 12z &= 0 \qquad & x - y + 5z &= 0,
\end{aligned}
$$

og bestem de talsæt $(b_1,b_2,b_3,b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= b_1 \qquad & -x - 2y + 3z &= b_2\\
4x + 8y - 12z &= b_3 \qquad & x - y + 5z &= b_4
\end{aligned}
$$

har mindst én løsning.

18. Bestem det reelle tal b således at ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
4x - 5y - 2z + 3w &= 3\\
3x - 2y - 5z + 4w &= 4\\
2x - 5y + 4z - w &= b
\end{aligned}
$$

har mindst én løsning. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet med dette valg af b.

19. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3. \end{aligned}$$

20. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem løsningsmængden til ligningssystemet $Ax = 0$. Fastlæg derpå vektoren b, således at ligningssystemet $Ax = b$ har mindst én løsning.

21. Idet P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredie grad, defineres operatorerne Q_1, Q_2: $P_3 \to P_3$ ved

$$Q_1p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

$$Q_2p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 3p(t)$$

for alle reelle t. Bestem nulrum og billedrum for begge operatorer.

22. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, er de fire differentialoperatorer L_1, L_2, L_3, L_4: $C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$\begin{aligned} L_1f &= f'' - 2f' - 3f \\ L_2f &= f'' - 2f' + f \\ L_3f &= f'' - 2f' + 5f \\ L_4f &= f' + f \end{aligned}$$

Bestem en basis for hvert af nulrummene $N(L_1)$, $N(L_2)$ og $N(L_3)$. Fastlæg dernæst en basis for hvert af nulrummene $N(L_2 \circ L_2)$ og $N(L_4 \circ L_1)$.

23. Når $M_{3,3}$ er rummet af alle reelle 3×3-matricer, defineres en lineær afbildning f: $M_{3,3} \to M_{3,3}$ ved, at $f(X) = M \cdot X$, idet matricen M er fastlagt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem nulrum og billedrum for afbildningen f.

24. Lad de lineære afbildninger f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ og g: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ i en passende valgt basis være givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at B(f) = N(g), og fastlæg på denne baggrund B(gf).

25. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for B(f), N(f) samt for B(f) $\cap$ N(f), og benyt dette til at bestemme en basis for B(f^2).

26. En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for såvel B(g) som for N(g). Godtgør, at B(g) = N(g), og bestem på denne baggrund B(g^2).

27. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren L: $C^\infty \to C^\infty$ er for alle tal a, b $\in \mathbb{R}$ givet ved

$$Lf = f'' + af' + bf.$$

Bestem tallene a og b, når funktionerne

$$\phi_1(t) = e^{-t} \quad \text{og} \quad \phi_2(t) = e^{2t}$$

er basis for nulrummet N(L). Bestem tillige en basis for nulrummet, hvis a = 7 og b = 10.

28. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \to C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^3 - 3D - 2D^0)f.$$

Fastlæg en basis for nulrummet $N(L)$ samt en basis for egenrummet svarende til -4.

29. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \to C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f.$$

Vis, at det tilhørende polynomium vil have rødderne i og $-i$ med multiplicitet 2, og fastlæg derpå en basis for nulrummet - $N(L)$ - af reelle funktioner.

30. Fastlæg det reelle tal a, således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & a \end{pmatrix}$$

vil have egenværdien -1.

31. Lad $A_{s,t}$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Bestem tallene s og t, når vektoren $(1,1,1)$ er egenvektor for matricen $A_{s,t}$, find derpå samtlige egenværdier for matricen. Er det muligt at bestemme en basis for $\mathbb{R}^3$ af egenvektorer for matricen?

32. Bestem samtlige egenværdier til matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og bestem de tilhørende egenvektorer. Kan man fastlægge en basis af egenvektorer for B?

33. Der er givet en lineær afbildning L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + 4D + D^0)f.$$

Vis, at funktionen $\phi(t) = te^{-2t}$ tilhører egenrummet svarende til egenværdien -3, og bestem derpå en basis for dette rum.

34. Bestem det reelle tal s således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien -1. Bestem i dette tilfælde alle egenværdier og egenvektorer. Kan matricen diagonaliseres?

35. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fastlæg en basis for $\mathbb{R}^4$, som består udelukkende af egenvektorer for f.

36. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi og én egenvektor, og bestem derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

37. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi med to lineært uafhængige egenvektorer, og bestem derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

38. Bestem den løsning til det lineære differentiallignings-system

$$\begin{aligned} f_1' &= 2f_1 + f_2 - f_3 \\ f_2' &= f_1 + f_2 - f_3 \\ f_3' &= f_1 + f_2 \end{aligned}$$

som opfylder, at $\mathbf{f}(0) = (3,2,1)^T$.

39. Bestem den løsning til det lineære differentiallignings-system

$$\begin{aligned} g_1' &= -11g_1 + g_2 + 2g_3 \\ g_2' &= 4g_1 - 11g_2 - 4g_3 \\ g_3' &= -4g_1 + 2g_2 - 5g_3 \end{aligned}$$

som opfylder, at $\mathbf{g}(0) = (1,2,-1)^T$.

Opgavesæt A:

A 1. Angiv for alle talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ antallet af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z - 2w &= -1 \\ x + 2z - w &= 2 \\ y + z + 2w &= a \\ -x + y - z + bw &= 1 \end{aligned}$$

og løs derpå ligningssystemet for $(a,b) = (3,2)$.

A 2. Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Vis dernæst, at $\mathbf{A}$ ved et passende basisskifte kan bringes på jordans normalform.

Benyt fx dette til at løse differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t), \qquad \text{med } \mathbf{f}(0) = (1,1,1,1)^T.$$

A 3. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en operator L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f$$

hvor a, b $\in \mathbb{R}$. Bestem a og b således at funktionen

$$\alpha: t \to te^{-2t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien 8, og fastlæg endelig en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien 8.

A 4. Lad U og V betegne henholdsvis nulrum og billedrum for en lineær afbildning g af $\mathbb{R}^4$ ind i sig selv fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Angiv en basis for hvert af rummene U, V og $U \cap V$. Fastlæg på denne baggrund en basis for billedrummet for g^2.

Opgavesæt B:

B 1. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. Vis, at funktionen

$$\alpha: t \to t\cos t$$

tilhører nulrummet for operatoren L: $C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f,$$

og fastlæg herefter en basis for nulrummet. Fastlæg tillige en basis for egenrummet svarende til egenværdien 1.

B 2. Lad **A** være matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad f og g være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis **A** og $\mathbf{A}^T$.

Bestem ortogonale baser for nulrummet for f - N(f) - og for billedrummet for g - B(g). Vis, at disse to baser udgør en ortogonal basis for R^5.

B 3. Lad $\mathbf{B}$ betegne matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor (a,b,c) er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder, at (1,1,1) er en egenvektor for $\mathbf{B}$. Find samtlige egenværdier for $\mathbf{B}$.

Afgør hvornår $\mathbf{B}$ er regulær, og vis, at nulrummet i modsat fald har dimension 1.

Begrund, at enhver basis bestående af egenvektorer vil være ortogonal, hvis a, b og c er reelle tal.

B 4. De to matricer $\mathbf{V}$ og $\mathbf{U}$ er givet ved

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis, at $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^3$, $\mathbf{U}^4 = \mathbf{V}^4 = \mathbf{0}$

og $\mathbf{UV} = \mathbf{VU} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$.

Sætter vi $\mathbf{A}_t = \mathbf{E} + t\mathbf{V}$ og $\mathrm{B}_t = \mathbf{E} + t\mathbf{U}$

vis da, at $\mathrm{B}_1^{-1} = \mathbf{A}_{-1}$.

Vis endelig, at det for alle reelle $t \neq 0$ gælder, at $\mathbf{A}_1$ er jordans normalform for $\mathbf{B}_t$, og bestem en matrix $\mathbf{S}_t$, så

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{S}_t\mathbf{A}_1\mathbf{S}_t^{-1}.$$

Opgavesæt C:

C 1. De lineære afbildninger f,g: $R^4 \rightarrow R^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at B(f) = N(g) og at B(g) $\cap$ N(f) = {0}, og bestem B(gf) og B(fg).

C 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar (a,b) en lineære operator L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret (a,b), således at funktionen

$$\beta: t \to e^{-t}\cos 2t$$

tilhører nulrummet for L.

Bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien -10.

C 3. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien -2 vil have dimension 2.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen $\mathbf{A}$ vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t), \quad \text{hvor} \quad \mathbf{f}(0) = (0,1,2,0)^T.$$

C 4. $P_3[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 3. grad givet på intervallet [-1,1]. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0 \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører $Q^\perp$ (det ortogonale komplement til Q) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1 \quad , \quad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for $Q^\perp$.

De ortogonale baser i Q og $Q^\perp$ vælges nu som basis for P_3.

Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

Opgavesæt D:

D 1. Lad U og V være nulrum og billedrum for den lineære afbildning f: R^4 -> R^4, der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene U, V og $U \cap V$, og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen f^2.

D 2. $P_2[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet [-1,1]. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Med Q betegnes det underrum, der udspændes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1 \quad , \quad \beta(t) = t^2 - t.$$

Vis, at $\{ \alpha , \beta \}$ er en ortogonal basis for Q.
Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til Q - kaldet $Q^{\perp}$.
Man vælger nu disse baser for Q og $Q^{\perp}$ som basis for hele P_2, og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$

D 3. Idet C^{∞} betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator L: C^{∞} -> C^{∞} ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for L.
Funktionen

$$\alpha: t \to te^{-t}$$

tilhører et egenrum for L. Bestem den tilhørende egenværdi samt en basis for egenrummet.

D 4. Den lineære afbildning F: R^4 -> R^4 er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen F vil have det karakteristiske polynomium $p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^2$
og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.
Fastlæg endelig en basis i R^4, således at den til F svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

Opgavesæt E:

E 1. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestem en ortogonal basis for både billedrummet - B(f) - og nulrummet - N(f) - for denne afbildning.
Vis, at disse baser tilsammen vil udgøre en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$, og fastlæg endelig en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2.

E 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle $a,b \in \mathbb{R}$ en operator L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + aD + bD^0)f.$$

Bestem tallene a og b, således at funktionen

$$\beta: t \to te^{-t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien -4.
Fastlæg derpå en basis for nulrummet for L - N(L).
En anden operator M: $C^\infty \to C^\infty$ er defineret ved

$$Mf = (D + 3D^0)f$$

Bestem endelig en basis for nulrummet svarende til den sammensatte operator $M \circ L$.

E 3. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^3$$

og vis endvidere, at matricen **A** ikke kan diagonaliseres. Foretag derpå et basisskifte, således at matricen **A** transformeres til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at vise, at samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) \quad \text{vil konvergere mod } \mathbf{0} \text{ for } t \to \infty.$$

E 4. En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er i standardbasen givet ved matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis, at de tre vektorer

$$u_1 = (1,-1,0)^T, \quad u_2 = (2,-1,-1)^T, \quad u_3 = (0,0,-1)^T$$

kan vælges som basis i $\mathbb{R}^3$.

Et element $x \in \mathbb{R}^3$ har i standardbasen et koordinatsæt x_s og i u-basen - $\{u_1,u_2,u_3\}$ et koordinatsæt x_u. Fastlæg koordinatskiftematricen P, således at

$$x_u = Px_s$$

Fastlæg endelig den til g svarende matrix i u-basen.

Opgavesæt F:

F 1. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i standardbasen fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for såvel nulrummet - N(f) - som billedrummet - B(f) - for denne afbildning.
Bestem tillige en basis for $N(f) \cap B(f)$ samt en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2.

F 2. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 4 & -11 & -4 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vis, at g kun vil have én egenværdi, samt at den til g svarende matrix ikke kan diagonaliseres.
Fastlæg derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så den til g svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix, og opskriv endelig denne jordanmatrix.

F 3. Bestem samtlige egenværdier inden for $\mathbb{C}$ for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres inden for $\mathbb{C}$.
Benyt fx dette til at bestemme den reelle løsning til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) \quad , \quad \mathbf{f}(0) = (1,-1,1,0)^T.$$

F 4. I $\mathbb{R}^5$ er de to underrum U og V givet ved

$$U = \text{Sp}\{(1,0,1,0,-2);(2,0,0,1,-3);(p,1,0,0,-4)\}$$
$$V = \text{Sp}\{(-1,3,1,2,0);(-3,1,-1,0,q)\}$$

Fastlæg konstanterne p og q, således at $U \perp V$. De her fundne værdier af p og q anvendes i det følgende.
Bestem derpå en ortogonal basis for såvel U som V.
Fastlæg endelig en mulig matrix for en lineær afbildning $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, hvor $V = B(F)$ - billedrummet for F - og en matrix for en lineær afbildning $G: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, hvor $U = N(G)$ - nulrummet for G.

Opgavesæt G:

G 1. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ er i det følgende forsynet med det sædvanlige indre produkt. Vis da, at $N(f) \perp B(f)$ - dvs at nulrum og billedrum for f vil være ortogonale.
Fastlæg derpå en ortogonal basis for såvel N(f) som B(f), og vis at disse baser tilsammen vil være en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.
Fastlæg tilslut en ortogonal basis for $B(f^2)$ - billedrummet for afbildningen $f \circ f$.

G 2. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. En lineær differentialoperator L på dette rum er givet ved

$$L = D^2 - 2D + D^0.$$

Bestem en basis for nulrummet - N(L), samt en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien -4.
Bestem endelig en basis for egenrummet for operatoren $L \circ L$ svarende til egenværdien 16.

G 3. Vis, at vektorerne

$$b_1 = (1,1,1)^T \quad , \quad b_2 = (-1,0,1)^T \quad , \quad b_3 = (2,1,-1)^T$$

vil være en basis for $\mathbb{R}^3$.
En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er i standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ givet ved

$$\begin{aligned} g(e_1) &= \phantom{e_1 +{}} 2e_2 + e_3 \\ g(e_2) &= e_1 \phantom{{}+ 2e_2} + 3e_3 \\ g(e_3) &= e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Opskriv den til g svarende matrix i standardbasen, og fastlæg tillige den til g svarende basis i forhold til b-basen - $\{b_1, b_2, b_3\}$.

G 4. Bestem samtlige egenværdier for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres.
Fastlæg derpå en basis i $\mathbb{R}^4$ således, at den til $\mathbf{A}$ svarende matrix i denne basis vil være på jordans normalform.
Benyt fx dette til at bestemme den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$$

som opfylder $\mathbf{f}(0) = (1,2,0,-1)^T$.

Opgavesæt H:

H 1. Rummet $\mathbb{R}^4$ tænkes forsynet med standardbasen. I $\mathbb{R}^4$ er givet underrummene

$$U = \mathrm{Sp}\{(1,2,-1,1)^T;(3,1,0,2)^T\}$$
$$V = \mathrm{Sp}\{(1,1,1,-2)^T;(3,0,2,-1)^T\}$$

Vis, at $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg en basis for $U \cap V$.
Fastlæg dernæst en ortogonal basis $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ i $\mathbb{R}^4$, således at $b_1, b_2 \in U$ og $b_2, b_3 \in V$.
Om en lineær afbildning $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vides, at

$$N(f) = U \quad \text{og} \quad B(f) = V$$

Fastlæg på denne baggrund en mulig matrixrepræsentation for f i B-basen, og bestem endelig med den valgte matrix en basis for $B(f^2)$.

H 2. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. På dette rum er givet en fjerde ordens lineær differentialoperator L, ved

$$L = D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0D^0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Om denne operator L oplyses, at

a) funktionen α: $t \to t$ tilhører egenrummet for L svarende til egenværdien 4/3, og

b) funktionen β: $t \to te^t$ tilhører nulrummet for L.

Fastlæg på denne baggrund differentialoperatoren L.

H 3. Vis, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2,$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.
Foretag et basisskifte, så matricen vil transformere til en jordanmatrix.

H 4. P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredie grad. På dette rum defineres for alle heltallige værdier af n en lineær operator L_n ved

$$L_n p(t) = (1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + np(t).$$

Bestem de til L_n svarende egenværdier og egenpolynomier, og fastlæg de værdier af n, for hvilke L_n vil være invertibel.
Bestem endelig for n = 6 og for n = 8 - om muligt - et polynomium p, der opfylder ligningen

$$L_n p(t) = 5t^3 + 3t^2.$$

[Vink: Man kan med fordel benytte en til L_n svarende matrixrepræsentation].

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 *THE FUNCTIONAL DETERMINANT*
by: Thomas P. Branson

224/92 *UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES*
by: Jeppe C. Dyre

225/92 *"HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium*
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 *"METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"*
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler. Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af; Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere

Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251|93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252|93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 Kuglepakning

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 Regressionsanalyse

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

af: Peter Harremoës

256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezoelectric Spherical Shell (Preprint)

by: T. Christensen and N.B.Olsen

257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion
metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed
(én kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!
Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model

by: Jeppe C. Dyre